



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, Neamț
Subiecte
03.02.2024
Clasa a VII-a

Subiectul 1

- a) Arătați că numărul $\sqrt{3 \cdot 2023^{2024} + 2024^{2023}}$ este irațional.
- b) Arătați că suma $2024^1 + 2024^2 + \dots + 2024^{2023}$ se divide cu 2023.

Subiectul 2

- a) Se consideră numerele raționale nenule x, y, z și t . Știind că $\frac{1}{x+y+z+t} = \frac{2}{y+z+t} = \frac{3}{z+t+x} = \frac{4}{t+x+y}$, să se arate că $x \cdot y \cdot z \cdot t < 0$.
- b) Fie numărul $x = 1 + \sqrt{5} + \sqrt{5^2} + \sqrt{5^3} + \dots + \sqrt{5^{2024}}$. Să se arate că $x \cdot \sqrt{5} + 1 = x + 5^{1012} \cdot \sqrt{5}$.

Subiectul 3

Fie ABC un triunghi echilateral și D simetricul lui B față de C. Notăm cu M mijlocul segmentului AC și cu N mijlocul segmentului DM. Arătați că $AD = 4CN$.

Subiectul 4

Se consideră trapezul ABCD cu $AB \parallel CD, AB > CD$ și $AC \perp BD$. Fie E mijlocul diagonalei AC. Paralela prin E la BD intersectează pe AB în M. Să se arate că:

- a) $\triangle AMC$ este isoscel.
- b) $ME = \frac{BD}{2}$ și $CM = \frac{AB+CD}{2}$.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se evaluează cu note de la 0 la 7 puncte.

Punctajul maxim este de 28 de puncte.

Timp de lucru: 3 ore.